数理解析研究所講究録
735巻 1990年 115-116

Eulerの恒等式と有限古典群

上智大・理工　篠田健一
Ken-ichi Shinoda

次の恒等式はEulerにより示されたものとして、良く知られている [Hardy - Wright, Theory of Numbers, Chap. 19]:

$$(GL) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2\cdots(1-x^m)^2} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1},$$

$$(U) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2m})} = \prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2n+1}),$$

$$(Sp) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}(m^2+m)}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n),$$

$$(O) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}(m^2-m)}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} = \prod_{n=0}^{\infty}(1+x^n).$$

これらの恒等式が有限古典群の数え上げの問題として、以下の様に解釈できることを示すことが、この講演の一つの目的である。

Vを有限体$\mathbb{F}$上のn次元ベクトル空間とし、GをVに自然に作用している有限古典群とする。$G = GL(V)$, $Sp(V)$または$O(V)$のとき$\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$とし、$G = U(V)$のとき$\mathbb{F} = \mathbb{F}_{q^2}$とする。さらに、$\mathcal{L}(V)$で$V$の部分空間全体のなすlatticeを表し、また$g \in G$に対し、$V^g = \{v \in V \mid gv = v\} = \mathrm{Ker}(g-1)$, $W \in \mathcal{L}(V)$に対し、$D_G(W) = \{g \in G \mid V^g = W\}$とおく。

問題 1. $d_G(W) := |D_G(W)|$ を求めよ。

Gは $\mathcal{L}(V)$ に自然に作用しており、$W \in \mathcal{L}(V)$ の G-軌道を $[W]$ と表すとき、どの場合でも $\mathrm{Stab}_G(W) = \{g \in G \mid gW = W\}$ は良く解るので、$D_G([W]) = \{g \in G \mid V^g \in [W]\}$ とおくと、問題1は次の問題2と同値である。

問題 2. $d_G([W]) := |D_G([W])|$ を求めよ。

この問題に対し、$\mathcal{L}(V)$ 上の関数の逆転公式、Gの部分群 $\mathrm{Stab}_G(W)$ などの性質を用い、きれいな形で答を与えることができる。特に

$$d_G(m) = \sum_{W \in \mathcal{L}(V),\, \dim W = m} d_G(W)$$
$$p_n^{(G)}(m) = |G|^{-1} \quad d_G(m)$$
$$p_\infty^{(G)}(m) = \lim_{n \to \infty} p_n^{(G)}(m)$$

(ここで (G) は G のタイプ GL, U, Sp, O のいずれかを表す.)

とおくと、

定理 $$p_\infty^{GL}(m) = \frac{x^{m^2}}{(x)_m^{\,2}}\,(x)_\infty, \quad p_\infty^{U}(m) = \frac{x^{m^2}}{(x^2)_m}\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2n+1})^{-1},$$
$$p_\infty^{Sp}(m) = \frac{x^{\frac{1}{2}(m^2+m)}}{(x)_m}\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)^{-1}, \quad p_\infty^{O}(m) = \frac{x^{\frac{1}{2}(m^2-m)}}{(x)_m}\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^n)^{-1}.$$

ここで $x = q^{-1}$ であり、$(x)_m = (1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)$ である。

従って冒頭の恒等式は $x = q^{-1}$ のとき $\sum_{m=0}^{\infty} p_\infty^{(G)}(m) = 1$ と同値である。詳細は次の論文で発表予定。

A. Rudvalis – K. Shinoda, *On portions of some subsets in finite classical groups* (in preparation).